ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MỘT SỐ PHÁT TRIỂN VÀ ÁP DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

LOAN THANH ĐẠO

THÁI NGUYÊN 2016

Mục lục

Lời mở đầu

Trong chương trình toán học phổ thông, những bài toán liên quan đến tích phân Riemann chỉ được quan tâm ở khía cạnh các tính chất, các phương pháp và kỹ thuật tính tính phân. Trong khi đó, các bài tập về bất đẳng thức với tích phân rất đa dạng và phong phú. Luận văn này nhằm giới thiệu và phân tích một số bất đẳng thức cơ bản đối với tích phân, từ đó áp dụng và phát triển cho một loạt bài toán khác. Luận văn cũng giới thiệu tích phân Riemann–Stieltjes là tích phân tổng quát hơn tích phân Riemann, áp dụng cho lớp hàm khả tích rộng hơn lớp hàm khả tích Riemann, cùng một số tính chất.

Nội dung của Luận văn được trình bày trong 3 chương: Chương 1 trình bày về tích phân Riemann-Stieltjes. Chương 2 giới thiệu các bất đẳng thức tích phân cơ bản. Chương 3 giới thiệu một số bài toán áp dụng và phát triển.

Một phần của luận văn (Mục 3.3) đã được báo cáo tại Hội thảo khoa học "Các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi toán" tỉnh Lai Châu tháng 10 năm 2015 và được đăng trong Kỷ yếu của Hội thảo.

Luận văn này là thành quả lao động nghiêm túc của bản thân tác giả, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Vũ Tiến Việt. Tác giả rất biết ơn sự giúp đỡ nhiệt tình, có hiệu quả của thày giáo hướng dẫn.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đến tập thể các thày cô của Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tác giả trong thời gian theo học các chuyên đề và hoàn thành các công việc của một học viên cao học.

Thái Nguyên, ngày 29 tháng 5 năm 2016

Tác giả

Loan Thanh Đạo

Chương 1

Tích phân Riemann-Stieltjes

Chương này giới thiệu tích phân Riemann–Stieltjes[1] là tích phân tổng quát hơn tích phân Riemann đã học trong chương trình trung học phổ thông. Về phương diện hình học, tích phân là bài toán tìm cách tính các lượng hình học: chiều dài, diện tích, thể tích. Tư tưởng chính của định nghĩa tích phân là chia nhỏ (phân hoạch) rồi cộng lại. Thực ra ý tưởng này đã có từ thời Archimedes (287-212 trước công nguyên), khi ông tính diện tích parabola.

Ở đây, ta sẽ chỉ nêu các định nghĩa và tính chất của các lớp hàm khả tích và phương pháp tính tích phân Riemann–Stieltjes mà không nêu chứng minh (các chứng minh có thể xem trong [4]).

1.1 Định nghĩa và sự tồn tại của tích phân Riemann–Stieltjes

Trong sách giáo khoa phổ thông, khi tính diện tích hình tròn người ta dùng phương pháp xấp xỉ (trên và dưới) bằng diện tích của các đa giác đều ngoại hoặc nội tiếp. Đấy là ý tưởng chính để định nghĩa diện tích hình phẳng. Tích phân trên và tích phân dưới bắt nguồn từ trực giác hình học này.

1.1.1. Phân hoạch và tổng Darboux

Giả sử $[a, b]$ là một đoạn hữu hạn của đường thẳng thực $\mathbb{R}$.

[1] G.F.B. Riemann (1826-1886), nhà toán học người Đức; T.I. Stieltjes (1856-1894), nhà toán học và thiên văn học người Hà Lan.

Định nghĩa 1.1.1. *Phân hoạch P của $[a,b]$* là tập hữu hạn các điểm $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sao cho

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ta viết đơn giản $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

Ký hiệu $\mathcal{P}$ là tập hợp tất cả các phân hoạch của $[a,b]$.

Ta nói rằng phân hoạch P^* là *mịn hơn* phân hoạch P nếu $P^* \supset P$, tức là mỗi điểm của P là điểm của P^*. Trong trường hợp đó, ta viết $P \ll P^*$ hoặc $P^* \gg P$. Cho trước hai phân hoạch P_1 và P_2 thì rõ ràng

$$P_1 \cup P_2 \gg P_1 \ , \ P_1 \cup P_2 \gg P_2.$$

Độ mịn của phân hoạch P thường được tính bằng số sau

$$|P| = \max\{x_i - x_{i-1} \ , \ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Dễ dàng thấy rằng, nếu $P^* \gg P$ thì $|P^*| \leqslant |P|$.

Giả sử α là hàm không giảm trên $[a,b]$. Tương ứng với phân hoạch P ta đặt $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$.

Cho hàm thực f bị chặn trên $[a,b]$. Các tổng Darboux[2] trên và dưới ứng với phân hoạch P của f được xác định như sau:

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i; \quad L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

trong đó

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}; \quad m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\}.$$

Chú ý rằng, với phân hoạch P bất kỳ, ta luôn luôn có

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant L(P,f,\alpha) \leqslant U(P,f,\alpha) \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)],$$

trong đó $M = \sup\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$, $m = \inf\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$.

[2] J. G. Darboux (1842-1917), nhà toán học người Pháp.

1.1.2. Tích phân Riemann–Stieltjes

Định nghĩa 1.1.2. Ta định nghĩa *tích phân trên (dưới) của* f *đối với* α *trên* $[a, b]$ là số hữu hạn cho bởi công thức sau

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf\{U(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}\},$$
$$\Big(\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{L(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}\}\Big).$$

Ta luôn có

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leqslant \underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

Định nghĩa 1.1.3. Ta nói rằng f là khả tích đối với α trên $[a, b]$ nếu tích phân trên và tích phân dưới của f bằng nhau. Giá trị chung của chúng được gọi là tích phân R-S (Riemann–Stieltjes) của f đối với α trên $[a, b]$ và ký hiệu là

$$\int_a^b f d\alpha \quad \text{hoặc} \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Ta ký hiệu $\mathcal{R}(\alpha)$ là tập hợp tất cả các hàm f khả tích đối với α trên $[a, b]$. Nếu $\alpha(x) \equiv x$ thì ta viết $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\alpha)$ và gọi mỗi $f \in \mathcal{R}$ là hàm *R-khả tích* (hay khả tích theo nghĩa Riemann trên $[a, b]$). Lúc đó tích phân tương ứng của f được gọi là tích phân Riemann.

Mệnh đề 1.1.4. (xem [4]) *Nếu* $P^* \gg P$ *thì*

$$L(P, f, \alpha) \leqslant L(P^*, f, \alpha) \tag{1.1}$$
$$U(P, f, \alpha) \geqslant U(P^*, f, \alpha). \tag{1.2}$$

Mệnh đề 1.1.5. (xem [4]) *Ta luôn luôn có*

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha. \tag{1.3}$$

1.1.3. Điều kiện cần và đủ của hàm khả tích Riemann–Stieltjes

Định lý 1.1.6 (Riemann, xem [4])**.** *Cho* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *là hàm bị chặn và* α *là hàm không giảm trên đoạn* $[a, b]$*. Khi đó,* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *trên* $[a, b]$ *nếu và chỉ nếu với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* $P \in \mathcal{P}$ *sao cho*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leqslant \varepsilon. \tag{1.4}$$

Mệnh đề 1.1.7. (xem [4])

(i) *Nếu* (1.4) *đúng với* P *và* ε *nào đó thì* (1.4) *đúng với bất kỳ* $P^* \gg P$.

(ii) *Nếu* (1.4) *đúng với* $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *và* $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *thì*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(iii) *Nếu* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *và các giả thiết của (ii) được thực hiện thì*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha\Big| < \varepsilon.$$

Chú ý 1.1.8. Khi xét tích phân *Riemann* thì ta bỏ chữ α trong các tổng Darboux và trong tích phân trên (dưới). Người ta đã biết rằng:

(1) Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn thì $\forall\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - L(P, f) < \varepsilon \quad , \quad U(P, f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

với mọi phân hoạch P thoả mãn $|P| < \delta$.

(2) Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích Riemann, (P_n) là dãy phân hoạch với $\lim\limits_{n\to\infty} |P_n| = 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f).$$

(3) Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm bị chặn, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ là phân hoạch của $[a, b]$. Lấy tùy ý $c_i \in [m_i, M_i]$. Ta gọi

$$\sigma(P, f, C) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

là *tổng Riemann* của f ứng với P và $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Khi $c_i = f(t_i)$ và $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ thì ta đặt $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ và $\sigma(P, f, T) = \sigma(P, f, C)$. Khi đó ta có

$$L(P, f) = \inf_C \sigma(P, f, C) = \inf_T \sigma(P, f, T),$$
$$U(P, f) = \sup_C \sigma(P, f, C) = \sup_T \sigma(P, f, T).$$

(4) *f khả tích Riemann* trên $[a,b]$ khi và chỉ khi tồn tại số I hữu hạn có tính chất sau: với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$|I - \sigma(P,f,C)| < \varepsilon\ ,\forall C \quad \text{hoặc} \quad |I - \sigma(P,f,T)| < \varepsilon\ ,\forall T.$$

với mọi phân hoạch P có $|P| < \delta$. Trong trường hợp đó

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

(5) Nếu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ khả tích Riemann, (P_n) là dãy phân hoạch với $\lim\limits_{n\to\infty} |P_n| = 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(P_n,f,C_n) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(P_n,f,T_n),$$

trong đó C_n, T_n là các tập bất kỳ chọn theo P_n.

Ví dụ 1.1.9. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Lời giải. Với mỗi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geqslant n_0$. Chọn phân hoạch P của đoạn $[0,1]$ như sau

$$\begin{aligned} 0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n_0+1} < x_2 < x_3 < \dots < x_k = \frac{1}{n_0} < x_{k+1} < \dots \\ < x_m = \frac{1}{n_0-1} < x_{m+1} < \dots < x_p = \frac{1}{2} < x_{p+1} < \dots < x_q = 1 \end{aligned}$$

sao cho $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{4n_0}$, $\forall i = 2, 3, \dots, k, \dots, m, \dots, p, \dots, q$. Khi đó

$$U(f,P) - L(f,P) = U(f,P) < \frac{1}{n_0+1} + 2n_0\frac{\varepsilon}{4n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(chú ý $L(f,P) = 0$ và khi tính $U(f,P)$ ta chỉ cần xét $(2n_0+1)$ đoạn chia $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_{k-1},x_k]$, $[x_k,x_{k+1}]$, …, $[x_{p-1},x_p]$, $[x_p,x_{p+1}]$, $[x_{q-1},x_q]$ thôi).

1.2 Các lớp hàm khả tích Riemann–Stieltjes

Trong mục này ta trình bày tính khả tích của hàm liên tục, đơn điệu, gián đoạn và hàm hợp.

Mệnh đề 1.2.1. (xem [4]) *Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$ và α là hàm không giảm trên $[a, b]$ thì $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ trên $[a, b]$.*

Mệnh đề 1.2.2. (xem [4]) *Nếu f đơn điệu trên $[a, b]$ còn α liên tục và không giảm trên $[a, b]$ thì $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Mệnh đề 1.2.3. (xem [4]) *Nếu hàm f bị chặn trên $[a, b]$, f có nhiều nhất một số hữu hạn các điểm gián đoạn (liên tục từng khúc) trên $[a, b]$ và hàm α không giảm, liên tục tại mỗi điểm gián đoạn của f thì $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Mệnh đề 1.2.4. (xem [4]) *Giả sử $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ trên $[a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ với mọi $x \in [a, b]$ và g là hàm liên tục trên $[m, M]$. Khi đó $h = g \circ f \in \mathcal{R}(\alpha)$ trên $[a, b]$.*

1.3 Các tính chất của tích phân Riemann–Stieltjes

Mệnh đề 1.3.1. (xem [4])

(i) *Tập hợp $\mathcal{R}(\alpha)$ là không gian tuyến tính (trên trường số thực) và tích phân R-S là phiếm hàm tuyến tính, tức là nếu $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ và c, d là các hằng số thực thì $cf + dg \in \mathcal{R}(\alpha)$ và*

$$\int_a^b (cf + dg)d\alpha = c\int_a^b f d\alpha + d\int_a^b g d\alpha.$$

(ii) *Rõ ràng $\displaystyle\int_a^b d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$.*

(iii) *Tích phân R-S bảo toàn thứ tự, tức là nếu $f(x) \leqslant g(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ thì*

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant \int_a^b g d\alpha.$$

(iv) *Nếu $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ trên $[a, b]$ và nếu $a < c < b$ thì $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ trên $[a, c]$ và $[c, b]$ và*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

(v) Nếu $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *trên* $[a, b]$ *và nếu* $|f(x)| \leqslant M$ *trên* $[a, b]$ *thì*

$$\Big|\int_a^b f d\alpha\Big| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(vi) Nếu $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ *và* $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$ *thì* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *và*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2.$$

(vii) Nếu $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *và* c *là hằng số dương thì* $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ *và*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha.$$

Mệnh đề 1.3.2. (xem [4]) *Nếu* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *và* $g \in \mathcal{R}(\alpha)$ *trên* $[a, b]$ *thì*

(i) $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$,

(ii) $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *và* $\Big|\int_a^b f d\alpha\Big| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha.$

Mệnh đề 1.3.3. (xem [4]) *Giả sử rằng*

(i) α *là hàm đơn điệu tăng và đạo hàm* $\alpha' \in \mathcal{R}$ *trên* $[a, b]$,

(ii) f *là hàm bị chặn trên* $[a, b]$.

Khi đó $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *nếu và chỉ nếu* $f\alpha' \in \mathcal{R}$. *Trong trường hợp ấy ta có*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

1.4 Các phương pháp tính tích phân Riemann–Stieltjes

Mệnh đề 1.4.1. (xem [4]) *Cho* α *là hàm đơn điệu tăng trên* $[a, b]$ *và* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *trên* $[a, b]$. *Giả sử* φ *là hàm đơn điệu tăng thực sự, liên tục, ánh xạ từ* $[A, B]$ *lên* $[a, b]$. *Đặt*

$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y))\ ,\ g(y) = f(\varphi(y))\ ,\ y \in [A, B].$$

Khi đó $g \in \mathcal{R}(\beta)$ *và*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_A^B g d\beta.$$